Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Philosophie
Logik II
Sommersemester 2022

Dr. Christoph Schamberger
E-Mail: christoph.schamberger@web.de
Büro: Gebäude 23.32, Raum U1.24

5. Alternative Logiken

Alternative Logiken sind nicht-klassische Logiken, die bestimmte Schlussregeln der klassischen Logik nicht zulassen; stattdessen werden tw. abweichende Schlussregeln eingeführt.

5.1 Relevanzlogik

Ausgangspunkt: Vermeidung von Paradoxien der materialen Implikation, die in klassischen Kalkülen ableitbar sind:

ex contradictione quodlibet:
(a) $A \,\&\, \neg A \vdash B$

ex falso quodlibet:
(b) $\neg A \vdash A \supset B$
(c) $\forall x \neg Fx \vdash \forall x(Fx \supset Gx)$
(d) $\exists x \neg Fx \vdash \exists x(Fx \supset Gx)$

tautologia ex quolibet:
(e) $A \vdash B \vee \neg B$

verum ex quolibet:
(f) $A \vdash B \supset A$
(g) $\forall x Fx \vdash \forall x(Gx \supset Fx)$
(h) $\exists x Fx \vdash \exists x(Gx \supset Fx)$

Disjunktion/Konditional-Transformation:
(i) $A \vee B \vdash \neg A \supset B$
(j) $\forall x(Fx \vee Gx) \vdash \forall x(\neg Fx \supset Gx)$
(k) $\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \exists x(\neg Fx \supset Gx)$
(l) $A \supset B, C \supset D \vdash (A \supset D) \vee (C \supset B)$
(m) $(A \,\&\, B) \supset C \vdash (A \supset C) \vee (B \supset C)$
(n) $A \supset (B \vee C) \vdash (A \supset B) \vee (A \supset C)$

Konjunktion/Konditional-Transformation:
(o) $\neg(A \,\&\, B) \vdash A \supset \neg B$
(p) $\neg\exists x(Fx \,\&\, Gx) \vdash \forall x(Fx \supset \neg Gx)$
(q) $\neg(A \supset B) \vdash A \,\&\, \neg B$
(r) $\neg \forall x(Fx \supset Gx) \vdash \exists x(Fx \,\&\, \neg Gx)$

<u>Einige umgangssprachliche Gegenbeispiele</u>:

(a) $\neg A \vdash A \supset B$

Es ist nicht der Fall, dass die SPD in der nächsten Bundestagswahl die absolute Mehrheit erreicht.

Also: Wenn die SPD in der nächsten Bundestagswahl die absolute Mehrheit erreicht, wird Udo Lindenberg Bundeskanzler.

(c) $\forall x \neg Fx \vdash \forall x(Fx \supset Gx)$

Es gibt keine Kinder Platons. (Für jeden Gegenstand gilt: Es ist nicht der Fall, dass er ein Kind Platons ist.)

Also: Platons Kinder waren verheiratet.

(f) $A \vdash B \supset A$

Joe Biden wird in der nächsten Präsidentschaftswahl wiedergewählt.

Also: Wenn Joe Biden auf eine erneute Präsidentschaftskandidatur verzichtet, dann wird er in der nächsten Präsidentenwahl wiedergewählt.

(h) $\exists xFx \vdash \exists x(Gx \supset Fx)$

Es gibt jemanden, der über 100 Jahre alt ist.

Also: Es gibt jemanden, der über 100 Jahre alt ist, wenn er unter 18 Jahre alt ist.

(i) $A \vee B \vdash \neg A \supset B$

Morgen fliege ich nicht in die USA, oder der US-Präsident wird morgen zurücktreten.

Also: Wenn ich morgen in die USA fliege, dann wird der US-Präsident morgen zurücktreten.

(l) $A \supset B, C \supset D \vdash (A \supset D) \vee (C \supset B)$

Wenn John in Paris ist, dann ist er in Frankreich.
Wenn John in Istanbul ist, dann ist er in der Türkei.

Also: Wenn John in Paris ist, dann ist er in der Türkei; oder wenn er in Istanbul ist, dann ist er in Frankreich.

(q) $\neg(A \supset B) \vdash A \,\&\, \neg B$

Folgendes ist falsch: Wenn es einen Gott gibt, dann haben die Atheisten recht.

Also: Es gibt einen Gott, und die Atheisten haben nicht recht.

Folgendes ist falsch: Wenn es keinen Gott gibt, dann haben die Gläubigen recht.

Also: Es gibt keinen Gott, und die Gläubigen haben nicht recht.

Um obige Ableitungen zu verhindern, stellt die Relevanzlogik ein strengeres Kriterium für Folgerung (*entailment*) auf: Die Prämissen müssen für die Konklusion in dem Sinne relevant sein, dass sie inhaltliche Gemeinsamkeiten aufweisen, d. h. sie müssen mindestens einen Aussagen- oder Prädikatsbuchstaben gemeinsam haben. Diese Anforderung wurde ursprünglich von Wilhelm Ackermann an die *strenge Implikation* gestellt: „Die strenge Implikation, die wir durch $A \rightarrow B$ wiedergeben, soll ausdrücken, daß zwischen A und B ein logischer Zusammenhang besteht, daß der Inhalt von B ein Teil des Inhaltes von A ist“.[1]

1 Wilhelm Ackermann: „Begründung einer strengen Implikation“, in: *Journal of Symbolic Logic* 21, 1956, S. 113.

Relevanzlogische Kalküle weisen gegenüber klassischen Kalkülen zwei Änderungen auf:[2]

- Der Disjunktive Syllogismus ist unzulässig. Dadurch lässt sich auch die Austauschregel Konditional-Austausch nicht mehr ableiten.
- Die Konjunktions-Einführung ist nur zulässig, wenn α und β von genau denselben Annahmen abhängen:

Γ	(i)	α	
Γ	(j)	β	
Γ	(k)	$(\alpha \& \beta)$	i, j, &Ein

Die Relevanzlogik ist eine parakonsistente Logik. Eine Logik ist **parakonsistent** genau dann, wenn sie *ex contradictione quodlibet* nicht zulässt, also wenn sie es nicht zulässt, aus $A \;\&\; \neg A$ eine beliebige Formel B abzuleiten.

Lässt sich der Verzicht auf den Disjunktiven Syllogismus philosophisch begründen? Relevanzlogiker rechtfertigen ihre Ablehnung der Schlussregel durch Gegenbeispiele, die angeblich einen wahren Widerspruch enthalten; die Auffassung, dass es wahre Widersprüche gibt, wird als *Dialetheismus* bezeichnet. Betroffen sind z. B. Argumente mit einem Lügner-Satz, der hier kursiv geschrieben ist:

1. Ich bin der Präsident der USA, oder *es ist wahr, dass die erste Prämisse dieses Arguments falsch ist*.
2. Es ist nicht wahr, dass die erste Prämisse dieses Arguments falsch ist.

---

3. Also: Ich bin der Präsident der USA.

Variante mit verstärktem Lügner-Satz:

1. Ich bin der Präsident der USA, oder *es ist wahr, dass die erste Prämisse dieses Arguments falsch ist oder dass sie weder wahr noch falsch ist*.
2. Es ist nicht wahr, dass die erste Prämisse dieses Arguments falsch ist oder dass sie weder wahr noch falsch ist..

---

3. Also: Ich bin der Präsident der USA.

<u>Exkurs Filterlogik:</u>

In der Filterlogik werden der Disjunktive Syllogismus und die Konjunktions-Einführung beibehalten; stattdessen wird die Konditional-Einführung entsprechend eingeschränkt:

Konditional-Einführung (⊃Ein)

{i}	(i)	α	
Γ ∪ {i}	(j)	β	
Γ	(k)	$(\alpha \supset \beta)$	i, j, ⊃Ein

Wenn Γ mindestens ein Element enthält, gilt folgende Einschränkung der Konditional-Einführung: In den Zeilen, deren Menge von Annahmenummern das Element k enthält, wird weder eine Konjunktions-Einführung noch ein Disjunktiver Syllogismus angewendet.

Im filterlogischen Kalkül lassen sich zwar (a) *ex contradictione quodlibet* und (e) *tautologia ex quolibet* ableiten, nicht aber die anderen auf S. 1 angeführten Ableitungen.

2 Alan R. Anderson/Nuel D. Belnap jr.: *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity*, Bd. 1, Princeton/London: Princeton University Press 1975.

Nachtrag zur Relevanzlogik: Um die Reductio ad absurdum anwenden zu können, müssen wir häufig aus zwei Formeln β und $\neg\beta$ mit der Konjunktions-Einführung einen Widerspruch $(\beta \mathbin{\&} \neg\beta)$ ableiten. In der Relevanzlogik ist jedoch die Konjunktions-Einführung nur zulässig ist, wenn beide Formeln von genau denselben Annahmen abhängen, was nur selten der Fall ist. Dieses Problem lässt sich umgehen, indem wir ein neues Symbol „⊥" für Widerspruch einführen und die Reductio ad absurdum mit Hilfe dieses Symbols formulieren. Außerdem fügen wir eine Regel für die Einführung des Symbols „⊥" hinzu:

Widerspruchs-Einführung (⊥Ein)

Γ	(i)	β	
Δ	(j)	$\neg\beta$	
$\Gamma \cup \Delta$	(k)	$\bot$	i, j, ⊥Ein

Reductio ad absurdum (RAA)

{i}	(i)	α	
$\Gamma \cup$ {i}	(j)	$\bot$	
Γ	(k)	$\neg\alpha$	i, j, RAA

Übung: Beweisen Sie bitte $\alpha \supset \beta \vdash_R \neg(\alpha \mathbin{\&} \neg\beta)$.
Hinweis: In die umgekehrte Richtung ist die Ableitung des Konditional-Austauschs nicht möglich.

5.2 Intuitionistische Logik

Ausgangspunkt: Intuitionisten lehnen die Annahme ab, jede Aussage sei genau dann wahr, wenn sie mit einer außersprachlichen Wirklichkeit übereinstimmt. Diese Annahme ist beispielsweise bei mathematischen und philosophischen Aussagen problematisch. (Welches Stück der Wirklichkeit würde etwa mit „17–6 = 11" oder mit Kants Kategorischem Imperativ übereinstimmen?) Wenn man überhaupt den Begriff „x ist wahr" verwenden möchte, dann sollte er im Sinne von „x ist bewiesen" oder „wir haben gute Gründe, x zu behaupten" verstanden werden.

Insbesondere Philosophen in der Tradition von Michael Dummett (1925–2011) betrachten die intuitionistische Logik als geeignete Logik des philosophischen Argumentierens. Dummett motiviert den Einsatz der intuitionistischen Logik durch eine verifikationistische Bedeutungstheorie: Die Bedeutung jeder Aussage wird durch die Bedingungen ihres Beweises bestimmt.

Auch logisch komplexe Aussagen müssen entsprechend verstanden werden. Eine Aussage der Form $\neg A$ ist für Intuitionisten nicht allein dadurch wahr, dass A nicht bewiesen wurde. Vielmehr muss bewiesen sein, dass A gar nicht beweisbar ist, indem man etwa zeigt, dass jeder Beweis von A zu einem Widerspruch führt.

A gdw. A bewiesen ist.
$\neg$A gdw. bewiesen ist, dass A nicht beweisbar ist.
A $\vee$ B gdw. A bewiesen ist oder B bewiesen ist.
A $\supset$ B gdw. bewiesen ist, dass, wenn A beweisbar ist, auch B beweisbar ist.

Achtung: Wenn ein Beweis von $\neg A$ zu einem Widerspruch führt, ist $\neg\neg A$ bewiesen (Reductio ad absurdum). Aber für Intuitionisten ist damit keineswegs A bewiesen!

Intuitionistische Kalküle weisen gegenüber klassischen Kalkülen eine Änderung in den grundlegenden Regeln aus, aus der sich Änderungen in den abgeleiteten Regeln ergeben:

- Die Austauschregel Doppelte Negation ist unzulässig.
- Infolgedessen lassen sich die Austauschregeln Kontraposition, De Morgan und Konditional-Ersetzung nicht mehr ableiten und sind unzulässig.
- Mehrere Verzweigungsregeln des Baumkalküls sind unzulässig. Ein intuitionistisches Baumkalkül erfordert umfangreiche Änderungen.[3]
- In manchen intuitionistischen Kalkülen werden die Identitäts-Beseitigung und Identitäts-Einführung weggelassen oder verändert.

Anstelle der Austauschregel Doppelte Negation kann in intuitionistischen Kalkülen eine Schlussregel zur Einführung einer doppelten Negation abgeleitet werden. Somit ist die Einführung der doppelten Negation erlaubt, ihre Beseitigung jedoch verboten. Ebenso können anstelle der Austauschregeln Kontraposition, De Morgan und Konditional-Ersetzung Schlussregeln abgeleitet werden, die nur in eine Richtung gelten:

Doppelte Negations-Einführung (¬Ein)

Γ	(i)	α	
Γ	(k)	$\neg\neg\alpha$	i, ¬Ein

De Morgan (DM)

Γ	(i)	$(\alpha \,\&\, \beta)$	
Γ	(k)	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	i, DM

Γ	(i)	$(\alpha \vee \beta)$	
Γ	(k)	$\neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$	i, DM

Kontraposition (KP)

Γ	(i)	$(\alpha \supset \beta)$	
Γ	(k)	$(\neg\beta \supset \neg\alpha)$	i, KP

Konditional-Austausch (⊃Aus)

Γ	(i)	$(\alpha \supset \beta)$	
Γ	(k)	$\neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)$	i, ⊃Aus

Γ	(i)	$(\alpha \,\&\, \beta)$	
Γ	(k)	$\neg(\alpha \supset \neg\beta)$	i, ⊃Aus

Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten (*tertium non datur*) $A \vee \neg A$ ist in der intuitionistischen Logik kein Theorem und somit ungültig. Die Ablehnung dieses Prinzips war für den niederländischen Logiker Luitzen Brouwer (1881–1866) Anlass für die Entwicklung des intuitionistischen Logik und Mathematik.[4] Setzen wir für A eine Aussage ein, die ebenso wie ihre Verneinung nicht bewiesen ist, etwa die Goldbachsche Vermutung „Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen“, dann ist nach Brouwer auch die Aussage $A \vee \neg A$ nicht bewiesen: „Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen, oder es ist nicht der Fall, dass jede gerade Zahl größer als 2 die Summe zweier Primzahlen ist“.

3 Graham Priest: „Intuitionist Logic“, in: ders.: *An Introduction to Non-Classical Logic. From* If *to* Is, Cambridge u. a.: Cambridge University Press 2008, S. 103–119.

4 L. E. J. Brouwer: „Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie“, in: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 154, 1925, S. 1–7.

5.3 Dreiwertige Logiken

Logik **Ł$_3$**:

Jan Łukasiewicz versteht in seiner dreiwertigen Logik Ł$_3$ den Wahrheitswert ½ als „weder wahr noch falsch“. Die Zahl 1 steht für den Wahrheitswert „wahr“ und die Zahl 0 für „falsch“. Die Wahrheitsfunktionen von Ł$_3$ lauten wie folgt:

¬	
1	0
½	½
0	1

&	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

∨	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

⊃	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	½
0	1	1	1

Diese Wahrheitsfunktionen lassen sich auch kürzer ausdrücken. Sei *f* eine Interpretation, die jedem Aussagebuchstaben einen der Wahrheitswerte 1, ½ oder 0 zuweist, so gilt:

- $f(\neg\alpha) = |\, f(\alpha) - 1 \,|$
- $f(\alpha \,\&\, \beta) = \min[f(\alpha), f(\beta)]$
- $f(\alpha \vee \beta) = \max[f(\alpha), f(\beta)]$
- Wenn $f(\alpha) = ½$ und $f(\beta) = ½$, dann $f(\alpha \supset \beta) = 1$. Für alle anderen Interpretationen gilt: $f(\alpha \supset \beta) = \max[f(\neg\alpha), f(\beta)]$.

In Worten:

- Der Wahrheitswert von $\neg\alpha$ ist der Betrag der Summe aus dem Wahrheitswert von α und –1.
- Der Wahrheitswert von $\alpha \,\&\, \beta$ ist das Minimum der Wahrheitswerte von α und β.
- Der Wahrheitswert von $\alpha \vee \beta$ ist das Maximum der Wahrheitswerte von α und β.
- Wenn sowohl α als auch β den Wahrheitswert ½ haben, dann hat $\alpha \supset \beta$ den Wahrheitswert 1. Für alle anderen Interpretationen gilt: Der Wahrheitswert von $\alpha \supset \beta$ ist das Maximum der Wahrheitswerte von $\neg\alpha$ und β.

$\alpha \supset \beta$ hat in Ł$_3$ nicht dieselbe Bedeutung wie $\neg\alpha \vee \beta$, denn wenn $f(\alpha) = ½$ und $f(\beta) = ½$, dann $f(\alpha \supset \beta) = 1$, aber $f(\neg\alpha \vee \beta) = ½$. Diese Besonderheit macht z. B. $A \supset A$ in Ł$_3$ logisch wahr.

- In Ł$_3$ folgt eine Formel α genau dann logisch aus einer Menge Γ von Formeln (symbolisch: $\Gamma \vDash_{Ł3} \alpha$), wenn jede Interpretation, die allen Formeln von Γ den Wahrheitswert 1 zuweist, auch der Formel α den Wahrheitswert 1 zuweist.
- In Ł$_3$ ist eine Formel α genau dann logisch wahr (symbolisch: $\vDash_{Ł3} \alpha$), wenn jede Interpretation der Formel α den Wahrheitswert 1 zuweist.

Logik **K$_3$**:

Die Wahrheitsfunktionen der Logik K$_3$ von Stephen Cole Kleene sind weitgehend identisch mit den Wahrheitswerten von Ł$_3$. Der einzige Unterschied: Wenn $f(\alpha) = ½$ und $f(\beta) = ½$, dann $f(\alpha \supset \beta) = ½$:

⊃	1	½	0
1	1	½	0
½	1	½	½
0	1	1	1

Der Wahrheitswert von $\alpha \supset \beta$ ist das Maximum der Wahrheitswerte von $\neg\alpha$ und β. Somit hat $\alpha \supset \beta$ in K_3 dieselbe Bedeutung wie $\neg\alpha \vee \beta$.

Die Definitionen der logischen Folgerung und der logischen Wahrheit entsprechen denen für $Ł_3$:

- In K_3 folgt eine Formel α genau dann logisch aus einer Menge Γ von Formeln (symbolisch: $\Gamma \vDash_{K3} \alpha$), wenn jede Interpretation, die allen Formeln von Γ den Wahrheitswert 1 zuweist, auch der Formel α den Wahrheitswert 1 zuweist.
- In K_3 ist eine Formel α genau dann logisch wahr (symbolisch: $\vDash_{K3} \alpha$), wenn jede Interpretation der Formel α den Wahrheitswert 1 zuweist.

Die Logik K3 wird häufig als starke Kleene-Logik bezeichnet. Kleene entwickelte auch eine schwache Kleene-Logik. Die Wahrheitsfunktionen der schwachen Kleene-Logik unterscheiden sich von denen der starken Kleene-Logik darin, dass in allen Interpretationen, in denen eine Teilformel den Wahrheitswert ½ hat, die zusammengesetzte Formel ebenfalls den Wahrheitswert ½ hat.

Logik **LP** (Logic of Paradox):

Die Wahrheitsfunktionen der dreiwertigen Logik LP von Graham Priest sind identisch mit denen von K_3. Der Wahrheitswert 1 wird jedoch verstanden als „wahr und nur wahr“, 0 als „falsch und nur falsch“ und ½ als „wahr und falsch zugleich“. Daher ist in LP neben 1 auch ½ ein ausgezeichneter Wahrheitswert. Entsprechend ändern sich die Definitionen der logischen Folgerung und der logischen Wahrheit:

- In LP folgt eine Formel α genau dann logisch aus einer Menge Γ von Formeln (symbolisch: $\Gamma \vDash_{LP} \alpha$), wenn jede Interpretation, die allen Formeln von Γ den Wahrheitswert 1 oder ½ zuweist, auch der Formel α den Wahrheitswert 1 oder ½ zuweist.
- In LP ist eine Formel α genau dann logisch wahr (symbolisch: $\vDash_{LP} \alpha$), wenn jede Interpretation der Formel α den Wahrheitswert 1 oder ½ zuweist.

Zu allen hier genannten mehrwertigen Logiken lassen sich Kalküle bilden, die jedoch etwas komplexer sind.[5]

5 Graham Priest: „Many-valued Logics“ und „First Degree Entailment“ in: ders.: *An Introduction to Non-Classical Logic. From* If *to* Is, Cambridge u. a.: Cambridge University Press 2008, S. 120–162.